Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Άλγεβρας - Γεωμετρίας

Διαφορική Γεωμετρία

Διδάσκων: Θεόδωρος Βλάχος

Σεπτέμβριος 5, 2017

Θέμα 1

(α΄) Έστω $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $||c'(t)|| = \alpha_1$ και $||c''|| = \alpha_2$ με $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Δείξατε ότι η $\kappa(t)$ είναι σταθερή.

(β΄) Έστω $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = \left(2t, t^2, \frac{t^3}{3}\right)$$

Να δειχθεί ότι είναι σταθερής κλίσης , να βρεθεί η διεύθυνσή της και να επσληθευτεί το αποτέλεσμα.

Θέμα 2

(α΄) Έστω $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη και έστω κανονική επιφάνεια $\mathbb{S}$ με παραμετρική παράσταση

$$\mathbb{X}(u, v) = c(u) + vw(u)$$

με την w να είναι λεία και $\langle c'(u), w(u)\rangle = 0$ και $||w(u)|| = 1$. Να δείξετε ότι η καμπυλότητα Gauss της $\mathbb{S}$ είναι ίση με

$$K(u, v) = -\frac{[c'(u), w(u), w'(u)]^2}{||c'(u) + vw'(u)||^4}$$

(β΄) Έστω κανονική επιφάνεια $\mathbb{S}$ με μοναδιαίο κάθετο N. Αποδείξατε ότι μία επιφανειακή καμπύλη $c(t)$ της $\mathbb{S}$ είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν η κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$\mathbb{X}(t, v) = c(t) + vN(c(t))$$

έχει καμπυλότητα Gauss ταυτοτικά μηδέν.

Θέμα 3

(Α΄) Έστω επιφάνεια με γράφημα

$$z = \log x - \log y$$

(α΄) Δείξατε ότι η επιφάνεια είναι κανονική και βρείτε σύστημα συντεταγμένων.

(β΄) Είναι ευθειογενής ; Είναι αναπτυκτή ;

(γ΄) Σχηματίζει δίκτυο ασυμπτωτικών γραμμών ;

(Β΄) Έστω $X(u, v)$ σύστημα συντεταγμένων κανονικής επιφάνειας $\mathbb{S}$ χωρίς ισόπεδα και ομφαλικά σημεία. Αν οι κύριες καμπυλότητες είναι $k_1(p) = \frac{e}{E}$ και $k_2(p) = \frac{g}{G}$ δείξατε ότι και οι παραμετρικές γραμμές είναι και γραμμές καμπυλότητάς της.

Θέμα 4

Έστω $X(u,v)$ κανονική παραμετρική επιφάνεια και $N(u,v)$ μοναδιαίο εφαπτομένο και

$$N_u(u,v) = \lambda X_u(u,v) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

και $N_v(u,v) = 0$.

(α′) Να δείξετε ότι $F = 0$ και να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss.

(β′) Να δείξετε ότι X_v είναι σταθερό διάνυσμα και ότι η παραμετρική γραμμή $u = u_0$ είναι ευθεία.

(γ′) Να δείξετε ότι X_v κύκλος.